群上的概率论：随机游动和不变扩散

Laurent Saloff-Coste *

洗牌、体积增长以及 Harnack 不等式之间的联系源于群上的随机游动。群上的概率论关心的是这样一类概率测度和随机过程：它们所蕴含着的群的结构部分的决定了它们的性质。人们发现无论是复杂的理论还是具体问题的分析，群上的概率论都是一个变化多端的领域。虽然有许多新的例子，但我们还是集中在有者独立平稳增量的随机游动和不变扩散这两个问题上来讨论群上的概率论。随机游动的轨道是不连续的，而扩散有着连续的轨道。它们二者有许多重要的性质都是类似的，但是在某些方面包括潜在的群是不一样的。过程的基本性质是本文着重考虑的问题，而对于这两个过程的许多新发展，可以参考 $[V+]$, $[W]$.

我们的目的是介绍一般群上的随机游动和不变扩散理论，着重于代数、分析、几何之间的联系。通过研究这些过程我们希望了解过程潜在的群的性质以及相关问题。例如，一个紧流形的万有覆盖上的 Laplace 方程和热扩散方程的解的性质与基本群上随机游动的行为有关。从这一观点来看，清楚一大类群上随机游动的性质比研究某一具体例子的细节更为重要。积累的知识关心 d 维布朗运动的例子 (包括最近 Lawer,Schramn 和 Werner 的漂亮结果) 看起来遥不可及。但是人们可以满足于一般群上比这弱的结论。

文章分两部分：一部分考虑随机游动；另一部分考虑扩散。这两部分在许多方面紧密相关——无论是其想法，还是其严格的数学背景——还有许多是这篇文章所不能写清楚的。在不同的背后，从对称群 S_n 到李群 $SL_n(R)$ 到无穷维环面，我们所讨论的问题都有一种统一，在一方面任何实质性的进展都会引起整个领域的发展。

随机游动

设 G 是由有限的对称集 S 生成的群。即 $s \in S \Rightarrow s^{-1} \in S$, $G = \cup_{n=0}^{\infty} S^n$. 凯

*作者系美国康纳尔大学数学教授

莱图 (G,S) 的顶点是 G ，从点 x 到点 y 之间有一条边相连当且仅当 $\exists s\in S$, 使得 $y=xs$. 为了利用随机游动的基本思想，设想一个人在图的顶点集上走动，每隔单位时间他将随机地，等可能地走向其邻集中的一点，问 n 步后这个人处于什么位置。

更一般的，给定 G 上的一个测度 p, 相应的随机游动 $(X_n)_{n\geq 0}$ 在每一步前进的过程中，首先以概率 $p(s)$ 选取 G 中一点 s 然后走到 $X_{n+1}=X_ns$. n 步后 X_n 的分布是 p 的卷积 $p^{(n)}$, 这里 $p*q(x)=\sum_y p(y)q(y^{-1}x)$.

洗牌

随机游动的应用非常广泛，这是我们要研究群上随机游动的一个主要原因。例如大多数洗牌的方法都可以看成对称群 $S_n(n=52)$ 上的随机游动模型，即把洗牌看成在一系列置换中随机地选取一种。这样一个与步数有关的问题就产生了：需要多少次洗牌会使牌达到混合？ Bayer 和 Diaconis 在《纽约时报》上证明了七次洗牌是充分必要的。不仅问题有着广泛的吸引性，而且洗牌所蕴含的数学问题的确是丰富而漂亮。能够给出这么一个精确的回答，说明问题本身就是一个有趣的现象。这一现象被 Diacons 推广并命名为 cut-off 现象。

洗牌这一数学问题很早在数学上就开始讨论了：例如，Poincare ，Borel 等（参见 [Ho]). 然而第一个定量的定理是由 Diaconis 和 Shahshahani 给出的一个关于随机置换的结果。为了描述这一过程，设想卡片在桌子上整齐的排成一排，随机的等可能的选取两张牌并交换它们的位置。 cut-off 现象的一个例子就是经过 $\frac{1}{2}n\log n$ 次交换后，随机置换突然快速的收敛到均匀分布。这意味着一副标准的纸牌经过近 100 次交换后才能使达到混合。为了准确的描述这一结果，定义两个概率测度 p 和 q 之间的全变差距离 $\|p-q\|_{TV}=\sup|p(A)-q(A)|$, 其中上界是对所有 G 的子集 A 取得。

定理 1 给定对称群 S_n 上的随机置换，记 $p^{(k)}$ 为经过 k 次置换后的概率分布，$k(n,c)=\frac{1}{2}n(c+\log n)$ 。存在常数 A ，使得对所有的 n 和 $c>0$,

$$\|p^{(k(n,c))}-u_n\|_{TV}\geq 1-f(c)-Bn^{-1}\log n.$$

邻接置换（相邻的扑克牌做交换）和随机插入（随机的选取一个牌并把它独立的随机插入一个位置）是另外两个研究洗牌机制的例子。做 $n^3\log n$ 次扑克牌之间的相邻置换或 $n\log n$ 次随机的插入，才能使牌达到均匀的混合。在这两种情形下，确切

的 cut-off 的时间还是一个未知问题。专家猜测大约需要 $30,000$ 次相邻置换，和几百次随机插入才能使 52 张牌混合。

对足够大的 n, 每四对置换中有三对产生一个对称的群，但是研究者们对于利用置换要经过多少次才能使牌到达混合这一问题还没有线索。在过去的 20 年中，Aldous, Diaconis 和他们的许多合作者以及追随者们利用了各种各样的方法，来研究对称群以及其它有限群上的随机游动。我们接下来给出对这一问题的两种不同的刻画。如果要了解更多的细节可以参见 [D] 。

给定一种洗牌机制。把相关的两个过程 (X_n, Y_n) ——第一个是平稳的，第二个从任意一个固定状态出发——放在一个概率空间中一起，使得随时间的增长，$X_n = Y_n$ 的概率越来越大。在概率论中这一方法称为 " 耦合 " 。记 T 为 X_n 与 Y_n 首次相遇的时刻。 T 称为是耦合时间， Y_n 的概率分布 $p^{(n)}$ 和平稳分布 μ (也就是 X_n 的概率分布) 之间的全变差有上界如下

$$\|p^{(n)} - \mu\|_{TV} \leq Prob(T > n)\|.$$

因而问题就转化成建立一个好的耦合使得 $\mathrm{Prob}(T > n)$ 可以被估计。这一方法的好处是使得随机游动不仅局限于有限群上，在其它方面也可以广泛的应用。

当随机游动有更多的对称性时, 群表示论 (例如, 对称群) 可以帮助我们更好的研究随机游动。研究一个大的有限群上的随机游动可以看作研究一个大的矩阵，即随机游动的概率转移阵。群表示论通过矩阵的偏对角化使问题得以简化。例如，对称群 S_n, 开始时是 $n! \times n!$ 阶矩阵, 根据不可约表示论，在崩溃后矩阵的最大块仍有 $\sqrt{n!} \times \sqrt{n!}$ 阶。然而, 如果随机游动在内自同构下是不变的 (也就是说， $x \mapsto axa^{-1}$, 由上面所诱导出的典型的附加对称的例子), 因而每一块都是纯量阵, 因而正像随机置换那样，我们可以得到更细的结果。另一个非常有用的方法与比较不同的随机游动和基本的组合思想，包括相应的有限凯莱图上的路径的几何学。例如， Diaconis 和作者利用随机置换的比较，给出了洗牌问题中邻接置换，随机插入和其它许多问题的上界。

然而，定理 1 的结果只在一些特殊的例子中存在。对少数更大一类有限群上的随机游动已经存在一些稍弱一些, 但还是令人满意的结果。整体来说, 有限群上的随机游动还没有实质性的结论，特别是，考虑在小集合的生成元上定义的随机游动。

因而，有许多具有挑战性的以及尚未解决的问题。其中一个是这样的，任意给定的图 G ， A 是 G 的子集， A 的边界 ∂A 定义为所有连接 A 与 A^c 的边的集合。由 $(k,c)-$ 张成的集合是一个满足下面条件的有限图 G 全体，图 G 上每一顶点至多有 k 个邻居，对 G 任意子集 A,

$$\min\{\#A, \#A^c\} \leq \#\partial A.$$

这些图有很好的连通性。做为连通网络的模型，它们有实际问题的背景。随机游动是由少数的局部转移张成的，但是很快的收敛到平衡。第一个扩张的例子是由 Margults 利用以 Kazhdan 性质 (T) 形式的无穷群 $SL_n(Z)$ 的表示论给出的（参见 [L]). 对称群是否能够导出一族 $(k,c)A\#-$ 扩张仍是一个尚未解决的问题。

在讨论无穷群之前，我们首先强调一下有限群以及有限生成的群上的随机游动在许多方面是息息相关的。考虑特殊的无限群（例如 Kazhdan 性（ T ））上的结果，可能会给出有限图上的一些有趣结果。相反的，许多无限群可以由有限群来逼近。毕竟，一个目光短浅的随机游动者在一个大的有限循环群 Z/NZ 上走动时，不会立即意识到它不是在 Z 上走动。近来 $Grigorchuk$ 和 Zuk 计算了环积 $Z_2 \wr Z$（下一章可解群中将详细讨论这一群）上随机游动的谱测度（即 $[-1,1]$ 上满足 $p^{(n)}(e) = \int_{-1}^{1} \lambda^n d\mu(\lambda)$ 的测度） μ 。他们的计算恰说明了这一点。计算中他们采用了有限群上随机游动的逼进。同 Linnel 和 Schick 一起，他们证明这一计算对 Atiyah 关于紧流形覆盖上的 L^2-Betti 可分割数问题给出了一个否定的答案。

群上随机游动的生

对任意有限生成群上的随机游动，让 $\phi(n)$ 代表 $2n$ 步后返回到起始点的概率。因而如果 p 代表一步转移概率，我们有 $\phi(n) = p^{(2n)}(e)$. 整篇文章我们假设 p 诱导出群，而且 p 是有有限支集而且是对称的，即满足 $p(x) = p(x^{-1})$. 由于对称性的假设， $\phi(n) = p^{(2n)}(e)$ 关于 n 递减（考虑对整数上的简单随机游动，对任意的 n, 我们有 $p^{(2n+1)}(e) = 0$ 。因而对 $p^{(2n+1)}$ 的性质我们并不太感兴趣,）

如果随机游动以概率 1 是常返的，则它无穷多次返回原点。在 1920 年 Polya 证明了格点上的随机游动在 1 维 2 维的情形下是常返的，在 3 维以上情形下是非常返的。实际上概率论的基本理论告诉我们常返等价与 $\sum_n \phi(n) = +\infty$, 对 d 维整数格点， $\phi(n) \sim c(d)n^{-\frac{d}{2}}$. 从我们的观点来看，随机游动理论中了解 $\phi(n)$ 的性质

是最基本的问题。

1958 年， Kesten 在他的博士论文——由 Kac 的一个关于 2×2 随机矩阵的乘积的问题所引起的——建立了有限生成群上的随机游动这一课题。在他论文的结尾部分，他证明了 $\phi(n)$ 关于 n 呈指数速度收敛当且仅当群是非顺从的。如果存在定义在所有有界可测波雷尔函数上的一个连续的线性泛函满足当 $f \geq 0, \nu(\mathbf{1})A\# = 1$ 而且 $\nu(f_x) = \nu(f)$ 时，有 $\nu(f) \geq 0$ ，我们就称一个拓扑群 G 是 **amenable** ，上式中 $f_x(y) = f(y)$ 。这样一个连续线性泛函称为左不变均值。尽管顺从性与一个群的代数结构有关系，关于顺从群与非顺从群的区分还没有令人满意的代数描述。就在 Kesten 的工作之前， Folner 用等周图形学的语言描述了顺从性并且证明了一个群是非顺从的当且仅当存在常数 C 满足对任意的有限集 $A \subset G, \#A \leq C\#\partial A.$ 这些最初的结果很好的阐明了随机游动理论与代数几何有着密切关系。

所有的阿贝尔群，更通常的所有可解群都是顺从的。参见下面图 3 。由 k ($k \geq 2$) 个生成元生成的自由群 F_k ，亏格 $\} \geq 2$ 的二维可定向曲面上的基本群都是非顺从的。令人吃惊的非顺从群的例子包括一些群，它们所有的元素具有相同的有限阶。（这些深刻的例子是由 Adyan 给出的。证明中应用了 Grigorchuk 的联合增长准则）。自由群 $F_k(k \geq 2)$ 上的自然的随机游动有 当$n \to \infty$ 时，

$$\phi(n) \sim c(k)n^{-3/2}(2\sqrt{k}/(k+1))^{2n},$$

但是对大多数非顺从群上的随机游动来说， ϕ 确切的指数衰减速率，即谱半径 $\rho = \lim_{n\to\infty} \phi(n)^{1/2n}$, 是很难计算的，这一问题至今尚未解决。

在 Kesten 的论文之后二十年的时间里，对有限生成群上随机游动基本行为的研究几乎没有什么进展。 Kesten 在他的论文中曾经猜测：无穷群上的随机游动是常返的当且仅当这个群是 Z 或 Z^2 的有限扩张。直至 20 世纪 80 年代中期，才由 Varopoulos 证明了这一猜测是对的。参见 [V+], [W] 。连通李群上一个类似的猜测是由 Baldi, Lohoue, 和 Peyriere 利用 Guivarch,Keane, 和 Roynette 的工作在 1977 年解决的。但是由于因为李群的结构理论，这是一个完全不同的问题。

拟等距不变量

在 20 世纪 80 年代， Gromov 普及了距离空间上的拟等距的概念和把群上的凯莱图看成基本的几何对象的观点。在小范围和局部拓扑上不需加任何限制就能够

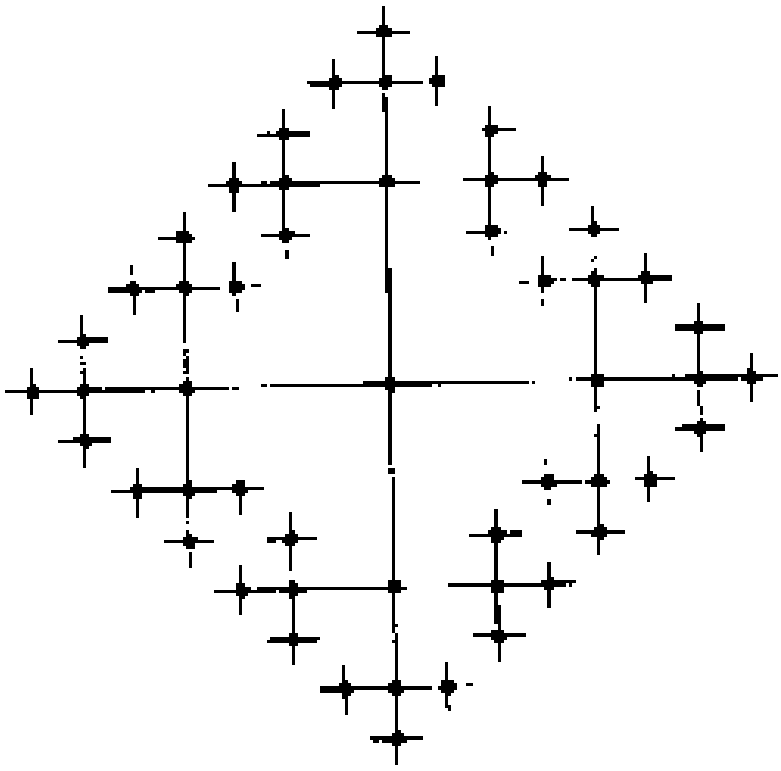

图 1

使大的范围上没有太大扭曲的映射称为拟等距。例如，一个紧黎曼流形的万有覆盖和它的基本群是拟等距的。两个凯莱图对同一个群 G 的两个不同的有限生成集是拟等距的。一个有限生成群同它的任何有限指标子群是拟等距的。

给定一个凯莱图 (G, S), 体积增长函数 $V(n)$ 是以单位元 e 为圆心，半径为 n 的球中的元素的数目，也就是说，能够写成 n 个生成元乘积的群中的元素的数目。等周轮廓函数记为

$$I(n) = \inf\{\#\partial A : A \subset G, \#A \geq n\}.$$

体积增长函数 V 和等周轮廓 I 在无穷远处是拟等距不变的。另外一个不太显然的拟等距不变量的例子是随机游动函数 ϕ（参见 [W] ）。从这一角度来看随机游动变得非常丰富。一个自然的问题就是这三个随机变量 V, I, ϕ 是否蕴含着群 G 的相同的信息。

体积增长函数不决定 I 或是 ϕ 的性质是平凡的：所有非顺从群的体积增长速度都是指数的，但是同样也有许多顺从群的体积增长速度是指数的。我们应该看到，

即使在顺从群中，函数 V 不能决定 I 或是 ϕ 的行为，而且等周轮廓 I 和返回概率函数 ϕ 之间的关系没有完全弄清楚。研究这类问题的困难来自于任意有限生成群代数结构的多样性和复杂性。这也是 Gromov 著名的定理——任何体积增长被多项式所控制的群包含一个有限指标幂零子群——如此引人注意的原因。下面 Varopoulos 的定理，使得对群上随机游动的研究有了突破。参见 [V+].

定理 2 设存在一个正常数 c，使得对任意的 n 都有 $V(n) \geq cn^d$. 因而存在正常数 C_1 和 c_1 满足对任意的 n, $\phi(n) \geq C_1 n^{-d/2}$, $I(n) \geq c_1 n^{1-1/d}$.

注意到这一定理的假设对群几乎没做任何限制，一方面，这意味着我们不能用我们所熟知的工具来证明这样一个定理。另一方面，群的结构是本质的，因为存在正则图——并不是由凯莱图所衍生的——从任何基本点来看都有着指数的增长速度，但它上面的简单随机游动却是常返的。 Varopoulos 原始证明的关键和下面简要列出的证明都是一个简单的微积分形式的不等式。在任何凯莱图 (G, S) 上，对任意的 $y \in G$ 和任何有限支集函数 f,

$$\sum_{x \in G} |f(xy) - f(x)| \leq |y| \sum_{x \in G} |df(x)|,$$

, 这里 $|y|$ 是 y 的字母长度（满足 $y = s_1 \cdots s_k$, $s_i \in S$ 的最小的 k ）， $|df(x)| = \sum_{x \in S} |f(xs) - f(x)|$ 是梯度的离散形式。这一不等式可以用来定义下面的泛函不等式包括 V 的反函数 $w(t) = \inf\{n : V(n) > t\}$. 记 $\Psi(t) = Cw^2(8t)$, 对 G 上任何具有有限支集的函数 f 有

$$\|f\|_2^2 \leq \Psi(\|f\|_1^2 / \|f\|_2^2) \|df\|_2^2,$$

其中 $\updownarrow^p$ 泛数是关于连续测度的。如果 $V(n) \geq cn^d$, 我们可以得到 $\Phi(t) \leq Ct^{2/d}$, 而且不等式（ N ）类似于 R^d 上一个由 Nash 在他的一篇著名的考虑抛物形方程解的 Holder 连续性的文章中给出的不等式。 Nash 利用他的不等式控制某些热扩散半群的性质。在本文的上下文中， (N) 研究 ϕ 得到了定理 2 的结论。

多项式领域

在 Gromov 的多项式增长定理和定理 2 的基础上，稍微做一点工作就可以得到 Kesten 的猜测：只有由 $\{0\}$, Z, Z^2 的有限扩张得到的有限生成群，其上的随机游动才是正常返的。 Gromov 和 Varopoulos 的工作还是下面一个更为准确的结果的

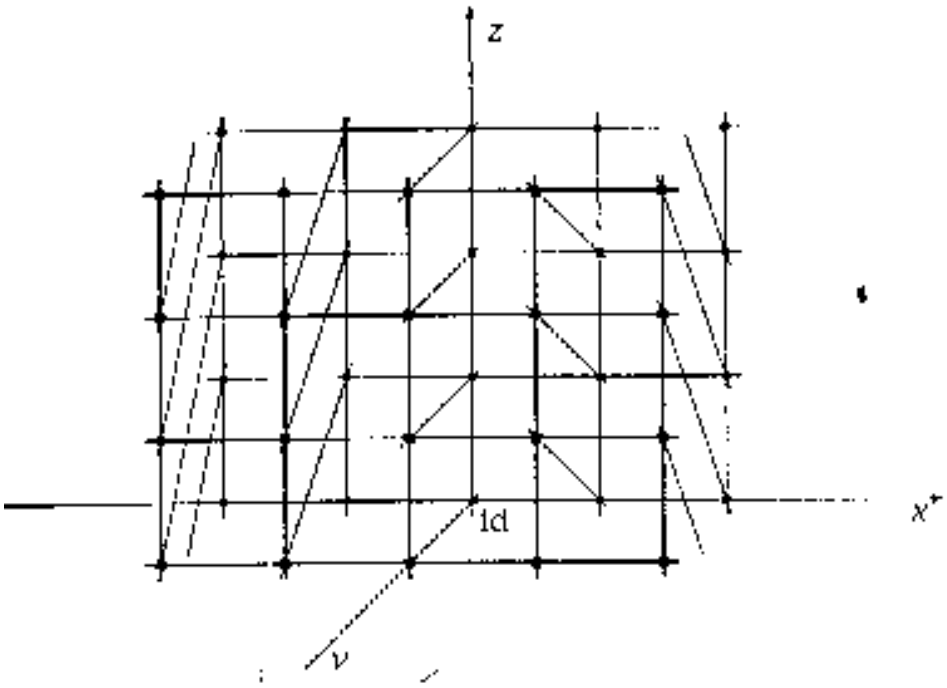

图 2

重要组成部分，这里对两个正函数 $f(n) \approx g(n)$ 意味着存在两个常数 c 和 C 满足 $0 < c \leq f(n)/g(n) \leq C < +\infty$.

定理 3 对一个有限生成群 G , 下面的性质是等价的。(1) $V(n) \approx n^d$; (2) $I(n) \approx n^{1-1/d}$; (3) $\phi(n) \approx n^{-d/2}$; (4) G包含一个有限指标幂零子群，而且 $d = \sum_i ir_i$, 这里 r_i 是阿贝尔群 N_i/N_{i+1} 的无扭秩， N_i 是 N 的下中心列，定义为 $N_1 = N, N_{i+1} = [N, N_i]$.

因而在多项式或幂零子群的范围中， V, I, ϕ 本质上包含了相同的信息。最简单的有着多项式增长的非阿贝尔群是可数 Heisenberg 群

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & y & z \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : x, y, z \in Z \right\}.$$

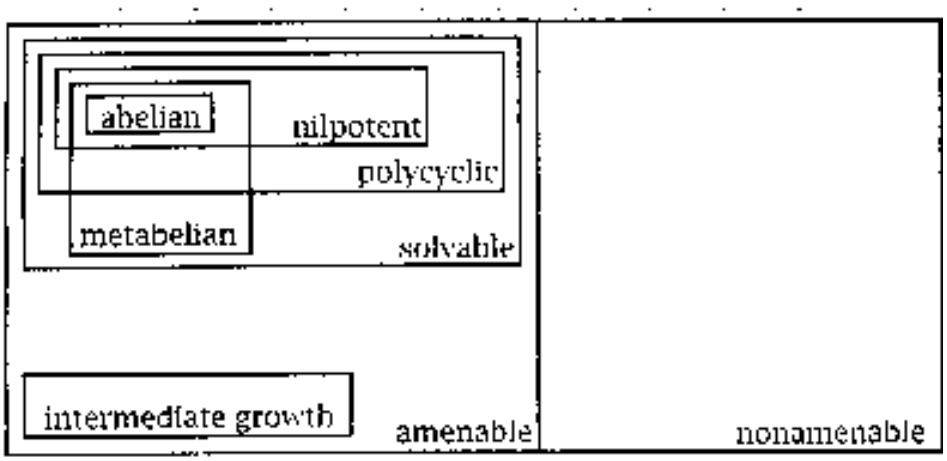

图 3

它是由取 $x = \pm 1, y = z = 0$ 或

$$y = \pm 1, x = z = 0$$

得到的四个矩阵生成的。相应的凯莱图见图 2. 有 $V(n) \approx n^4$, $I(n) \approx n^{3/4}, \phi(n) \approx n^{-2}$.

超多项式增长

有许多群包括顺从群，它们的体积增长速度大于多项式。实际上大多数群，包括顺从群都有这一性质。因而下面的结果是对定理 2 的一个非常有用的补充。

定理 4 固定 $\alpha \in [0, 1]$ 。假设存在常数 c ，对所有的 n 满足 $\log V(n) \geq cn^{\alpha}$. 则存在常数 c_1 和 c_2, 对所有的 n 满足 $\log \phi(n) \leq -c_1 n^{\alpha/(\alpha+2)}$, $I(n) \geq c_2 n/[\log n]^{1/\alpha}$.

ϕ 的界是由 Varpoulod 给出的；等周的界是由 Coulhon 和作者给出的。这以定理说明了任何指数增长群满足 $\log \phi(n) \leq -c_1 n^{1/3}$ 和 $I(n) \geq c_2 n/\log n$. 我们接下来可以看到这些界对某些群是必须的，但并不是对所有群都是必须的。定理 4 对增长速度大于任何多项式，但小于任何指数的群也是有用的。这样的群的存在性是 Grigorchuk 在 20 世纪 80 年代中期发现的。这样的群上的随机游动我们知之甚少，但是有越来越多的人来研究这种例子的群的结构。

可解群

由 Milnor 和 Wolf 的一个结果，我们知道可解群的增长速度或是多项式的或是指数的。参见图 3 。我们从多循环群的一个令人满意的结果出发。通过一个深刻的群结构的定理，得到有限扩张，连续李群的顺从离散子群等都是多循环群，这里离散是指从周围群的子群所继承的拓扑是离散的。由于他们的特殊的代数结构，多循环群的性质比较易于理解，而且有下面一个令人满意的结论。

定理 5 设 G 是一个连通李群的离散子群，则 G 是有限生成的，而且满足下面二者之一： 1. 存在一个整数 d 满足 $V(n) \approx n^d$ 2.$V(n)$ 呈指数增长。在后一种情形下，有 $I(n) \approx n/\log n,\ \log \phi(n) \approx -n^{1/3}$.

$\log \phi$ 的下界是由 Alexopoulos 给出的，上界是由 Pittet 给出的。其余的界来自于定理 4 。指数增长多循环群的一个简单例子是半直积 $Z \propto Z^2$, 对 $(x,u),(y,v) \in Z \times Z^2$ 定义群运算符：

$$(x,u)\cdot(y,v) = (x+y, u+A^x v),\ A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

这是 Sol 李群的离散情形，它给出了瑟斯顿几何化程序中用来刻画 3 维流形的 8 种几何学的一种。

对通常的可解群的指数体积增长的结论是不同的。可解群的最简单的一种是亚交换群，它的换位子群是阿贝尔的。即使在这一类群中，函数 I 和 ϕ 的行为也可以相差甚远。对 $\lambda > 1$ ，记 A_λ 是由 $u_\pm(x) = x \pm 1$ 和 $v_\pm^\lambda(x) = \lambda^\pm x$ 所定义的的仿射群 $ax+b$ 的子群。这些群是亚交换的而且体积呈指数增长。它们在 $ax+b$ 中不是离散的，而且大多数不是多循环的。当 λ 是一个整数时， A_λ 可以表示成 $\langle a,b : aba^{-1} = b^\lambda \rangle$, 这里 $a = v_+, b = u_+$ (它们也称作是 Baumslag-Solitar 群)。

图 4 和 5 刻画了 A_2 的凯莱图。当 λ 是代数的时, A_λ 有 $I(n) \approx n/\log n,\ \log \phi(n) \approx -n^{1/3}$. 当 λ 是超越数时, A_λ 和圈积 $Z \wr Z$ 是同构的而且有 $\log \phi(n) \approx -n^{1/3}(\log n)^{2/3}$.

在研究亚阿贝尔群的过程中，圈积 $Z^2 \wr Z$ 起了很重要的作用。它们也被称为 “点灯群”。把 Z^d 想象称成美国城市的一个映射 (多维的而且是无穷的)。在每一路口有一盏路灯可能是开或是关 (只有有限盏登可能是亮的)。另外，一个点灯的人在整个街道上游荡，他或是打开灯或是关闭灯。 $Z^2 \wr Z^d$ 中的元素可以想象成由灯和点灯的人站在某处构成的一道风景。参见图 6 。注意到这种独特的描述刻画并不

能获得两个元素之间的关系。然而，一个 $Z^2 \wr Z^d$ 上的自然的随机游动可以描述成一个点灯者有 $2d$ 种可能性走到它的一个邻接顶点后，或关上灯或开灯。 Donsker 和 Varadhan 的一个定理说明 Z^d 上的简单随机游动到时刻 n 为止曾经到达的顶点的数目 N_n, 满足当 $n \to \infty$ 时， $\log E(e^{-\lambda N_n}) \sim -c(\lambda, d)n^d d + 2$ ，其中 E 代表数学期望。这恰是在证明点灯群 $Z^2 \wr Z^d$ 上有 $\log \phi(n) \approx -n^{d/(d+2)}$ 这一结论所必须的 [PSA] 。

下面的例子说明了有限生成呈指数增长的亚阿贝尔群， phi 有无穷多种不同的行为。这一性质对等周轮廓 I 也是对的，而且 Erschler(Dyubina) 在一项充满希望的的工作的研究过程发现了圈积的一个新的更为精确的等周的上界。两个关于有限生成亚阿贝尔群彼此相关的挑战性的尚未解决的问题是： (a): 对 ϕ 和 I 的所有性质分类； (b)： ϕ 的行为能够决定 I 的行为吗？反之，这个问题对吗？因而，尽管已经有了一些非常显著的进展，但是对随机游动以及有限生成群上的等周问题的完整解决在现阶段仍然遥不可及，而且即使对可解群这一问题仍旧没有得到解答。这与我们将要描述的有关连通李群上的不变扩散形成鲜明对比，后一问题由于由于存在简单而且令人满意的群结构理论，已经有了一个完整的结论。

不变扩散过程

我们改变假设，考虑局部紧连通群上的左不变扩散过程。 R^d 上的布朗运动是经典的而且研究的最多的例子。这些过程可以在许多方面有着不同的性质，但是它们有一个重要的共同性质就是都有独立平稳增量和连续的轨道。等价地，由 Hunt 的一个定理，它们的无穷小生成元都是可以写成

$$L = \sum_i X_i^2 + X_0$$

的二阶微分算子，这里 X_i 是左不变向量场因而可以看成李代数中的元素。因为局部紧的连通群是李群的投影极限（参见，例 [H] ），所以即使 G 不是李群，上式也有意义。平行的有关随机游动的结论是令人惊讶的， X_i 起了生成元的作用。

如果 $\mu_t * \mu_s = \mu_{t+s}$ 而且当 $t \to 0$时, $\mu_t \to \delta_e$, 则概率测度 $(\mu_t)_{t>0})$ 族形成一个卷积半群。如果对 e 的任何邻居 U, 有 $t \to 0$时, $t^{-1}\mu_t(G\ U) \to 0$, 则这样一个半群是高斯的。最后一条性质等价于相应的随机过程样本轨道的连续性。群 G 上的一个左不变扩散过程 $Z = (Z_t)$ ， Z_t 的概率分布 $\mu_t, t \geq 0$ 形成了一个满足

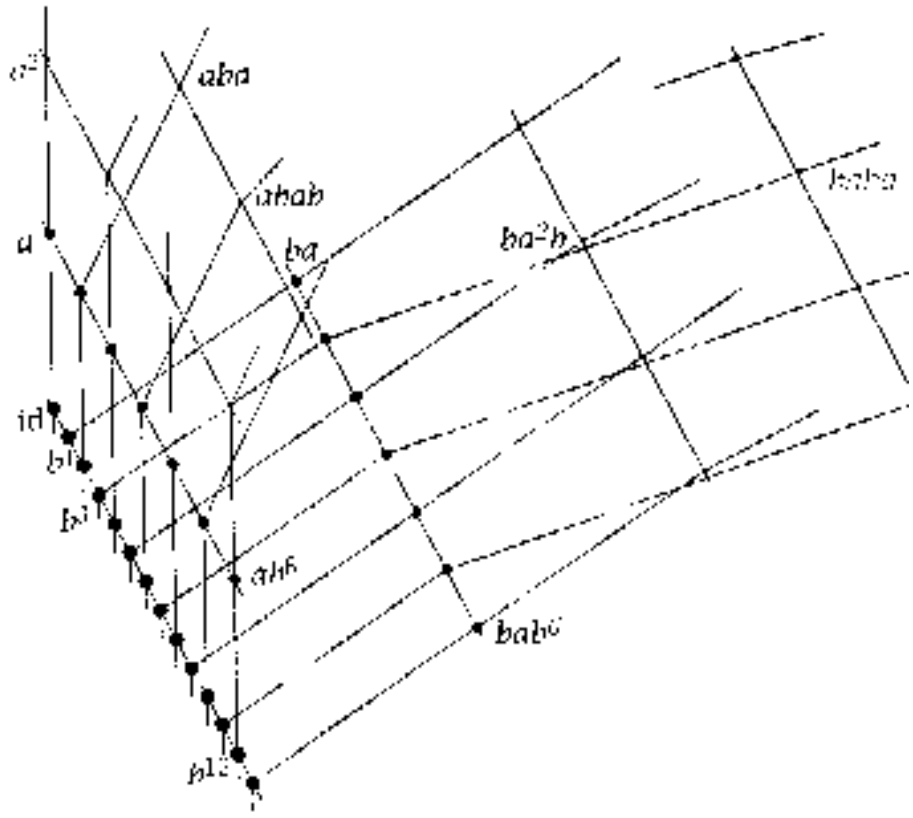

图 4.

$u(t,x) = \int_G f(x,y)d\mu_t(y)$ 是热扩散方程 $(\partial_t - L)u = 0,\ u(0,x) = f(x)$ 解的高斯卷积半群。

为了用几何的观点完成这一问题的说法, 我们介绍自然的 " 距离函数 "$d(x,y)$(允许距离为 ∞) ，称之为内蕴距离或 Carnot-Caratheodory 距离，定义为：

$$d(x,y) = \sup\{f(x) - f(y) : f \in C^\infty(G), \Gamma(f,f) \le 1\},$$

其中 $\Gamma(f,f) = \frac{1}{2}(Lf^2 - 2fLf) = \sum_i |X_i f|^2$ 是 " carre du champs". 这一定理的范围更为广泛，但本质上等价于其它对路径的长度做了适当限制的定义。特别地，如果 G 是一个李群，而且 L 是左不变黎曼结构的 Laplace- Beltrami 算子，则 d 就是黎曼距离。相应的体积增长函数 $V(t)$ 定义为关于 G 上左不变 Haar 测度半径为 t 的度量球的体积。

关于这些扩散的主要问题是： μ_t 关于 Haar 测度有光滑的密度吗？如果有，

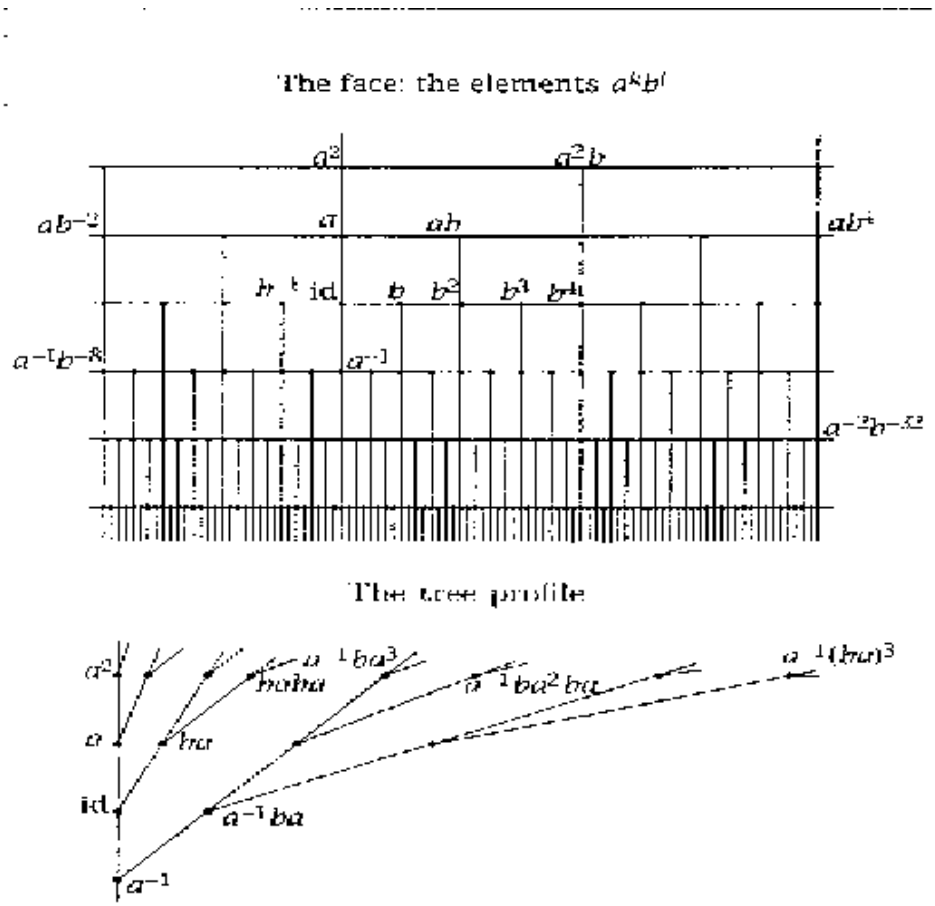

图 5.

它的密度会有什么样的性质？这一性质与距离函数 d 、体积增长函数以及向量场族 (X_i) 的关系是什么？这一性质与群 G 的代数结构又有什么样的关系？假设 $(\mu_t)_{t>0}$ 允许连续的密度 $x \mapsto \mu_t(x)$, $\mu_t(e)$ 在原点的值恰类似于本文第一部分中随机游动返回原点的概率 $\phi(n)$ ，当然我们最关心的还是当 t 趋于 0 或是 ∞ 时 $\mu_t(e)$ 有什么样的性质。为简单起见，我们集中考虑 $L = \sum X_i^2$, 也就是说 $X_0 = 0$ 的情形。$X_0 \neq 0$ 的情形很有意思，但需要更多的讨论与一些完全不同的思路，而且需要更多的技巧。

局部理论

设 G 是一个 n 维连通李群。在本文上下文中一个自然的假设是一族 (X_i) 产生 G 上的李代数。这意味着 X_i 的值和它们任意阶的换位子线性扩张成一个李代数。

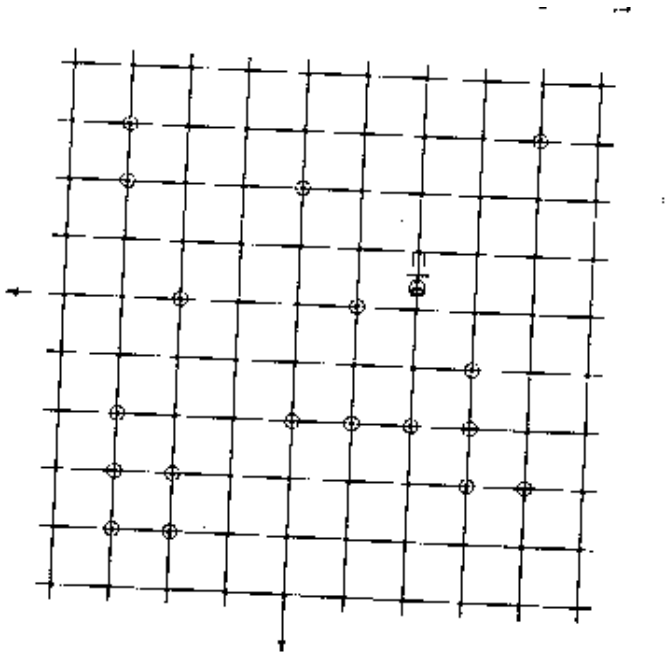

图 6.

我们始终保证这一假设成立。对二阶微分算子 L ，它对应着著名的 Hormander 半椭圆算子条件。我们将要讨论的局部理论可以看成一个对半椭圆算子进行更深和更难研究的模型。距离 d 的几何学是在次黎曼几何学的定义下研究而且与控制理论有着密切关系。尽管群结构大大地简化了问题，但从某种意义上看，群结构在这里不起任何作用（参见 [V+] ）。

在 Hormander 的条件下，对所有的 $t>0$, μ_t 有光滑的正测度，距离 d 关于任意固定的局部欧几里的距离是 Hollder 连续的，算子 L 是次椭圆的。存在仅依赖于序列 (X_i) 的整数 $m \in [n, 1+\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}]$，满足当 $t \to 0$ 时，$\mu_t(e) \sim ct^{-m/2}$ 。m 也表现为当 $t \to 0$ 时，$V(t) \sim bt^m$ 。非常类似于欧氏空间中的调和函数，存在常数 $C = C_l$ 使得对任意的 $r \in (0,1)$ 和任意的方程 $Lu = 0$ 的在半径为 d 的球 $B(x,r)$ 中的正解都有

$$(GH) \qquad \sup_{B(x,r/2)} u \le C \inf_{B(x,r/2)} u.$$

这一 Harnack 不等式的几何本质蕴含着这一不等式是一个非常有力的工具而且说明了距离 d 产生的作用。

因而, 在 $Hormander$ 条件下, 李群上的对称高斯半群有很好的性质。在讨论它们大规模和长时间的行为之前, 我们简要的考虑一下当 G 不是一个李群的时候, 局部会发生什么样的现象。这一情形在非平凡的意义下说明了一个高维非平凡情形下狄氏空间上分析和几何的一般结论。简单的但是非常有意思的可数就是可数圆群的乘积, 以及不同维的可数正交群的乘积。在这样的情形下, $(\mu_t)_{t>0}$ 对任意的 $t>0$ 会有很好的连续密度吗？尽管这方面的高斯半群的理论在 [H] 中已经有所发展, 但这一问题并没有得到解答。很自然的考虑双不变 (至少有一边不变), 也就是说, 紧群上的中心高斯半群。实际上, 在无穷维环面上有许多有趣和具有挑战性的问题还没有得到解答, 这里无穷维生成元可以简化写成 $L=\sum_{i,j} a_{i,j}\partial_i\partial_j$, 这一无穷和很容易解释成作用在仅依赖于有限坐标上的函数求和。

Bendikov 和作者最近一个的结论是任何一个紧的, 连通的, 局部连通的可距离化的群上有一列关于 Haar 测度有光滑连续正密度的中心高斯半群。当 t 趋于 0 时, $\mu_t(e)$ 的值会以不同的方式发生爆炸, 例如 $e^{[\log 1/t]^{1+\lambda}}, e^{t-\lambda}, e^{e^{t^{-\lambda}}}, \lambda>0$ 等等.

一个 $(\mu_t)_{t>0}$ 有连续正密度的充分但不必要的条件是联合内蕴距离是连续的。这一条件也蕴含了一个 Harnack 椭圆不等式。也就是说, 如果 d 是连续的, 则对任意域 Ω 和 Ω 上的任意紧集 K $A\#,4fTZ3\#J''\mathrm{C}(\ \Omega,K)$ 满足方程 $Lu=0$ 在 Ω 上的任意正的连续解有

$$(H)\qquad\qquad \sup_K u \le C(\Omega,K)\inf_K u.$$

注意到不等式的几何本性在这里已经消失了, 我们并不知道如何象 (GH) 中那样通过选取 (Ω,K) 为恰当的同心圆, 使常数 $C(\Omega,K)$ 平移不变。令人吃惊的是, Bendikov 和 Berg 分别于 20 世纪 70 年代在自己的博士论文中独立的发现这样一个 Harnack 不等式可以在无穷维情形下成立。更为显著的是, 不等式 (H) 可以有 $\mu_t(e)$ 的行为进行刻画。

定理 6 设 L 是紧的连通群 G 上的中心对称的高斯半群 $(\mu_t)_{t>0}$ 的无穷小生成元。L 满足椭圆 Harnack 不等式 (H), 当且仅当 $t\to 0$ 时, $\log \mu_t(e)=o(1/t)$ [BS] 。

在定理 6 的证明中一个至关重要的积分就是研究一个紧简单李群上的双不变扩散显示出维数的作用而且与短期中期以及长期行为相关联的双不变扩散。

李群上的长期行为

现在我们考虑非紧的连通李群, 讨论在由一族 X_i 产生的李代数的标准情况下, $t \to \infty$ 时 $\mu_t(e)$ 的长期行为。由于群的结构起了很重要的作用, 所以长期行为实际上是问题的关键。

体积函数的增长速度 V 在无穷远处的行为与 (X_i) 的选择是独立的。 Guivarch 在 20 世纪 70 年代早期证明了在无穷远处的体积增长或是指数的或与一个幂函数同阶, 这一幂函数的指数 D 是一个是仅依赖于其潜在的群的整数。 V 有多项式行为的群称为 R（刚性）类的群。 G 的伴随表示是通过把内自同构 $x \mapsto axa^{-1}$ 的行为提升到李代数上得到的。 R 类的群可以用代数中的伴随表示的术语来刻画, 它的特征值必须是纯虚数。所有 $m \times m$ 阶么模上三角时矩阵构成的群 $U(m)$ 是 R 类的, 而且 $V(t) \approx t^D$, 其中 $D = \frac{1}{6}(m-1)m(m+1)$.

R 类的群是顺从的而且是么模的, 即有双不变 Haar 测度, 但是有许多顺从的么模李群有指数的增长速度（因而也就不是 (R) 类的）。最简单的这样的群是上面在可解群上的随机游动一章提到的 Sol 群。 Sol 可以刻画为 $R^2 \propto R$ 的半直积, 定义为 $\begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}$.

顺从么模李群上 $\mu_t(e)$ 的性质由下面的定理来刻画。

定理 7 对任何顺从么模连通李群, 如果当 $t \to \infty$ 时, $V(t) \approx t^d$, 则当 $t \to \infty$ 时, $\mu_t(e) \approx t^{-D/2}$. 如果 V 是指数的, 则当 $t \to \infty$ 时, $\log \mu_t(e) \approx -t^{1/3}$.

Varopoulos 给出了多项式增长的上下界。指数增长情形, 下界是由 Alexopoulos 给出的, 上界是由 Varopoulos 给出的, 后来 Hebisch 和 Robinson 又用不同的方法对指数增长情形下的上界做了证明。参见 [V+]. 定理 7 类似于定理 5 , 可以类似于定理 5 用等周轮廓的理论加以补充（参见 [P], [V+]）。这两个结果, 关于随机游动和扩散同时出现, 而且可以用类似的方法作出证明。 Alexopoulos 近期的一个结果完善了定理 7 在多项式体积增长群（即 (R) 类群）上的长期渐进行为。Alexopoulos 的工作与（ R ）类群的代数结构紧密相关, 他对偏微分方程的齐次化理论思想和技巧做了调整, 而这一技巧是用来处理 R^n 中周期系数的大规模微分算子行为。

当然, 对非顺从群, $\mu_t(e)$ 呈指数衰减, 速率由 $L = \sum X_i^2$ 的谱隙 λ 来刻画,

定义为 Raleigh 商的下确界

$$\frac{\int_G \sum |X_i f|^2 d\nu}{\int_G |f|^2 d\nu}, f \neq 0, f in L^2(G, \nu),$$

这里 ν 是 G 上的右不变 Haar 测度。谱隙 λ 消失当且仅当 G 是顺从的。应该注意到与有限生成群的情形强烈的对比，对连通的局部紧的顺从群与非顺从群做了区分 [Pa] 划分有一个令人满意的结论。典型的非顺从连通李群都是都是半单非紧的李群，象 $SL_n(R)$ 以及 $SO(p,q)$ 中单位元的连通分支。关于李群上扩散的一个最早的结果是 Bougerol 的局部中心极限定理，这一定理给了半单李群上一个精确的渐进结果： $t \to \infty$ 时，存在 $a \geq 3$ 和如上定义的 $\lambda > 0$, 使得 $\mu_t(e) \sim ct^{-a/2}e - \lambda t$. 通常，这样一个精确估计是很难得到的。在交换或半单情形下，表示论是研究这一问题的工具之一，但是对其它的群，包括商群和可解群，表示论在很大程度上对 $\mu_t(e)$ 性质的研究不起任何作用。

很多年以来，尽管有李群的结构理论，但很一般地准确地理解 $\mu_t(e)$ 的长期行为似乎没有任何进展。然而，在近十年来 Varopoulos 已经发展了一种用来刻画任意连通的实李群上的任意对称高斯半群顺从与非顺从，么模与非么模的理论。结果的主要形式类似与定理 7 。，但证明方法确大相径庭。定理 4 的证明在本质上主要是分析的。下面的定理 8 确却是与概率、代数、几何都有密切的关系。

Varopoulos[Vb] 把连通的李群分成两部分， (B) 和 (NB). 这一代数的划分非常复杂在这里不便精确的描述。所有（非紧）的半单群，例如 $SL_n(R)$, 都在 (NB) 中。在顺从群的情形下，这一划分可以简化成一种简单形式， (C) 和 (NC), 可以用伴随表示或几何学中（广义）的根的定义来理解。 (R) 类群恰是么模的 (NC) 群。(NC) 群的更为深刻的例子是来自于半单群的 KAN Iwasawa 分解中的群 AN ，例如群 $ax + b$ 。下面给出描述产生 C 和 NC 群的一族最简单的例子。记 $S_l = R * * * R^2$, 这里 $l = (l_1, l_2) \in R^2$ 乘积由下式给出。

$$(x, u) \cdot (y, v) = (x + y, u + A_l^x v), A_l = \begin{pmatrix} e^{l_1} & 0 \\ 0 & e^{l_2}. \end{pmatrix}$$

如果 $l_1 l_2 < 0$, S_l 是 (C) 类的，如果 $l_1 l_2 > 0$, S_l 是 (NC) 类的。 Varopoulos 的主要结果是用 $u_t(e)$ 的长期行为给出 (B) 和 (NB) 的分类（因而也就给出了 (C) 和 (NC) 的分类），并区分了所有可能的行为。

定理 8 (1) 对 (NB) 类型的群，对每一 $L = \sum X_i^2$, 存在非负实数 a（可能依赖于 L ）满足当 $t \to \infty$ 时， $\mu_t(e) \approx t^{-a} e^{-t\lambda}$ 。 (2) 对 (B) 类型的群，当 $t \to \infty$ 时，$\log e^{t\lambda} \mu_t(e) \approx -t^{1/3}$. 这里 λ 是相应的算子 L 的谱隙。

因子 t^{-a} 和 $e^{-t^{1/3}}$ 分别出现在 (NB) 与 (B) 的情形可以用概率论的语言解释为某一欧几里得布朗运动到时刻 t 为止一直停留在一个凸的区域中。布朗运动的性质（即它的协方差矩阵）是由群的代数结构和 L 决定的。凸区域是由根的几何性质决定。而且它是紧的不依赖于群是 (B) 或是 (NB) 。与指数行为相对应，它达到了 $e^{-t^{1/3}}$. 要准确描述布朗运动的协方差矩阵和上面凸区域，应该在 (NB) 情形下确定常数 a 。但实际上，通常 a 的值是很难确定的而且随 L 连续的变化。

这些结果可以推广到对任意连续紧支集上、对称非负函数 f 卷积的幂的行为的描述。这一行为准确地模仿了依赖于群是 (B) 或 (NB) 的对称高斯卷积半群的行为。用卷积幂的语言来说，结果可以在局部紧的连通群上用公式直接表示。正如在可解群一章中所讨论的通过由有限生成群 $Z^2 \wr Z^d$ 来说明，限制 G 是连通的是至关重要的。

做为总结，对 (B) 和 (NB) 有一几何的描述 [Vc] 。它与填充不变有关。这在许多文章里有所考虑，特别的 Gromov 考虑了这一问题。一个简单的连通黎曼流形的二维填充不变 $\psi_2(t)$ 是定义为：对任意一个长度至少为 t 的环，考虑把这一环做为边界的嵌入圆盘。得到这样的圆盘的面积的最小值。 $\psi_2(t)$ 是在所有这样的环上的下确界面积取上确界。对每一维数 $k = 2, \cdots, n-1$, 存在一个 k 填充不变，这里 n 是流形的拓扑维数。特别的， $\psi_{n-1}(t)$ 给出了一个有光滑边界的紧集上的 $n-1$ 次卷积的最大可能的体积是 t ，而且与等周轮廓有着密切的关系。

本质上, 一个群是 (NB) 的, 当且仅当它的一个填充不变大于任意多项式增长。因而对一个实的连通李群，我们有三个等价划分：分析的，根据对称高斯半群的长期行为进行的概率划分，用几何中的填充不变的方法进行划分，以及 (B) ， (NB) 的代数划分。毫无疑问这些基本的结果，将会引出有关不变扩散、调和分析以及李群上的几何的进一步发展。

参考文献

[A] G. Alexopoulos, Cebtered sub-Laplacians on Lie groups of polynomial volume growth, *Mem, Amer, Math. Soc.,* to appear.

[BGS] L.Bartholdi, R. Grigorthuk, and Z. Sunik, *Branch Groups,* Handbook of Algebra, vol. 3 (M. Hazewinkel, ed.), North-Holland, Amsterdam, 2001.

[BS] A.Bendikov and L.Saloff-Coste, Central Gaussian semigroups of measures with continuous density, *J. Func. Anal.* to appear.

[D] P. Diacons, *Group Representations in Probability and Statistics,* IMS Lecture Notes Monograph Ser., Hayward, CA, 1986.

[H] H. Heyer, *Probability Measures on Locally Compact Groups,* Springer- Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1977.

[H o] M. Hostinsky, *Methodes Generales du Calcul des Probabilities,* Gauthier-Villars, Paris, 1931.

[L] A. Lubotzky, *Discrete Groups, Expanding Graphs and Invariant Measures,* Birkhauser, Basel, 1994.

[Pa] A. Paterson, *Amenability,* Math. Surveys and Monographs, vol 29, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1988.

[P] Ch. Pittet, The isoperimetric profile of homogeneous Riemannian manifolds, *J,. Differential Geom.* **54** (2000), 255-302.

[PSa] Ch. Pittet and L. Saloff-Coste, Amenable groups, isoperimetric profiles and random walks, *Geometric Group Theory Down Under, Canberra 1996* (J. Cossey et al., eds.), de Gruyter, Berlin, 1999, pp. 293-316.

[PSa] N. Varopoulos, Diffusion on Lie groups I, II, III, *Canad. J. Math.* **46** (1994), 438-448, 1073-1093;**48**(1996), 641-672.

[Vb] —, Analysis on Lie groups, *Rev. Mat. Iberoamericana* **12**(1996), 791-917.

[Vc] —, A geometric classification of Lie groups, *Rev. Mat. Ibreoamericana* **16**(2000), 49-136.

[V+] N. Varopoulos, L. Saloff-Coste, and T. Coulhon, *Analysis and Geometry on Groups,* Cambridge Tracts in MAth., vol. 100, Cambridge University Press, Cambridge, 1992.

[W] W. Woess, *random Walks on Infinite Graphs and Groups,* Cambridge Tracts in

Math., vol. 138, Cambridge University Press, Cambridge, 2000.

(贾淑梅 译, 陈大岳 校)